Seminar Nasional Teknologi Informasi & Komunikasi Terapan 2011 (Semantik 2011) ISBN 979-26-0255-0

MENGHITUNG FUNGSI RESIKO DAN KEGAGALAN PADA PEMODELAN LINEAR

Mulyana
Jurusan Statistika FMIPA Unpad
Jl. Raya Bandung Sumedang Km 21 Jatinangor – Sumedang
*e_mail : **mulyanakanaan@yahoo.co.id**.*

ABSTRAK

Berdasarkan teori farmakologi, hubungan fungsional antara kecepatan penyembuhan dengan faktor yang mempengaruhinya adalah linear. Nilai ramalan untuk konsumen merupakan ramalan faktual, sedangkan untuk produsen rata-rata hitungnya. Sehingga model mana yang akan dijadikan acuan dalam memprediksi tingkat penyembuhan. Makalah ini merupakan hasil penelitian kepustakaan, dengan tujuan untuk menelaah tentang beda pendapat antara konsumen dan produsen, terhadap produk yang dibuat si produsen tersebut. Proses penelitian dimulai dengan telaah kepustakaan, dan diakhiri dengan analisis data tentang pendapat efektivitas penyembuhan sejenis obat. Hasil yang diperoleh menyatakan bahwa, telaah perbandingan pendapat konsumen dengan produsen merupakan model linear. Dengan persoalan yang harus dianalisis adalah tentang fungsi target, fungsi resiko dan fungsi kegagalan.

Kata kunci : fungsi target, fungsi kegagalan, fungsi resiko.

1. PENDAHULUAN

Model linear, adalah model hubungan fungsional yang sering digunakan dalam telaahan pengaruh beberapa variabel terhadap satu variabel tertentu. Misalkan dalam ilmu farmakologi. Tingkat penyembuhan obat (Y), dipengaruhi oleh umur (X_1), asupan gizi (X_2) dan kedisiplinan meminum obat (X_3). Dengan modelnya, $Y = \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3 + \varepsilon$. Secara matematis dapat ditunjukan penaksir faktual ($\hat{\underline{Y}}$) dengan rata-ratanya $E(\hat{\underline{Y}})$ sama, sama dengan $X\hat{\underline{Y}}$, sehingga perlu ditentukan fungsi target, dan fungsi resiko dengan fungsi kegagalannya berdasarkan fungsi target tersebut.

2. DASAR TEORI

2.1. Latar Belakang

Hubungan fungsional antara sebuah variabel (variabel respon, variabel tidak bebas), dengan satu atau lebih variabel lain (variabel pengaruh, variabel prediktor, variabel bebas). Yang memiliki ciri aditif dan berpangkat satu pada parameternya, dinamakan Model Linear. Jika Y variabel tidak bebas, dan X_1 , X_2 , . . . , X_p , variabel bebas, maka model linearnya :

$$Y = \mu + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \ldots + \beta_pX_p + \varepsilon \qquad (1)$$

Dengan μ , β_1 , β_2 , . . . , β_p , parameter model, dan ε kekeliruan, yang merupakan variabel acak tidak terukur, yang diasumsikan berdistribusi normal dengan rata-rata 0, varians konstan σ^2 dan saling bebas.

Jika (y_i ; x_{i1} , x_{i2} , . . . , x_{ip}) ; i = 1, 2, . . . n > p+1 = m, sampel. Maka model sampelnya

$$\underline{Y} = \mathbf{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}\,. \qquad (2)$$

dengan

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & . & . & . & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & . & . & . & x_{2p} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_{n1} & . & . & . & x_{np} \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{\beta} = \begin{pmatrix} \mu \\ \beta_1 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_p \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

Berdasarkan metode kemungkinan maksimum, penaksir untuk $\underline{\beta}$ adalah

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y} . \tag{4}$$

Sehingga model ramalannya,

$$\hat{\underline{Y}} = X\hat{\underline{\beta}} . \tag{5}$$

Dalam hal ini $\hat{\underline{Y}}$, dinamakan **taksiran nilai faktual**.

Karena $E(\underline{Y}) = E(X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}) = E(X\underline{\beta}) = X\underline{\beta}$, maka berdasarkan sifat linearitas model, taksiran $E(\underline{Y})$ sama dengan, $E(\hat{\underline{Y}}) = X\hat{\underline{\beta}}$.

Dalam hal ini $E(\hat{\underline{Y}})$ dinamakan **taksiran rata-rata hitung nilai faktual**.

Dari hasil paparan tersebut, jadi $X\hat{\underline{\beta}}$ memiliki dua peran, yaitu sebagai penaksir nilai faktual dan rata-rata hitung nilai faktual. Sehingga untuk keperluan analisis, perlu dipilih peran mana yang akan digunakan ?

2.2. Fungsi Target, Kegagalan dan Resiko

Graybill (1961) menunjukan bahwa $\hat{\underline{\beta}}$ merupakan statistik (1) tak bias, (2) bervarians minimum, (3) cukup, (4) lengkap, (5) konsisten, dan (6) efisien. Sehingga Zellner (1994), merekomendasikan fungsi kegagalan tertimbang (fungsi kegagalan diboboti, *balanced lost function*), dengan persamaan

$$\lambda\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right) + (1-\lambda)\left(X\hat{\underline{\beta}} - X\underline{\beta}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - X\underline{\beta}\right) \tag{6}$$

λ : konstanta nonstokastik, $0 < \lambda < 1$,

Jika $\hat{\underline{\beta}}$ digunakan sebagai penaksir untuk $\underline{\beta}$.

Pada formulasi yang diajukan Zellner tersurat, suku pertama merupakan jumlah kuadrat residu (deviasi), jika $\hat{\underline{\beta}}$ sebagai penaksir nilai faktual, sedangkan suku kedua jika sebagai penaksir rata-rata hitung nilai faktual. Sehingga Giles, Giles dan Ohtani (1996) dengan Wan (1994), berpendapat, formulasi fungsi kegagalan tersebut dapat digunakan sebagai acuan untuk menetapkan peran yang diutamakan untuk $X\hat{\underline{\beta}}$.

Mengacu pada formulasi fungsi kegagalan dan pendapat-pendapat tersebut, untuk menentukan peran mana yang akan diutamakan dari $X\hat{\underline{\beta}}$, dapat digunakan fungsi target dengan persamaan

$$\underline{T} = \tau\underline{Y} + (1-\tau)E(\underline{Y}) \tag{7}$$

τ : $0 < \tau < 1$, konstanta nonstokastik.

Berdasarkan sifat linearitas model, maka

1. $\hat{\underline{T}} = \tau\hat{\underline{Y}} + (1-\tau)\,E(\hat{\underline{Y}}) = \tau X\hat{\underline{\beta}} + (1-\tau)X\hat{\underline{\beta}} = X\hat{\underline{\beta}}$
2. $E(\underline{T}) = E(\tau\underline{Y}) + E((1-\tau)E(\underline{Y})) = \tau E(\underline{Y}) + (1-\lambda)E(\underline{Y}) = E(\underline{Y})$

Sehingga $E(\underline{T}) = E(\underline{\hat{Y}}) = X\underline{\hat{\beta}}$. Hal ini menyimpulkan bahwa, fungsi target $\underline{T}$ memiliki ciri seperti $\underline{Y}$. Sehingga jika $X\underline{\hat{\beta}}$ ingin digunakan sebagai penaksir faktual ($\underline{\hat{Y}}$) , maka $\tau \to 1$, sedangkan sebagai penaksir rata-rata hitung nilai faktual ($X\underline{\hat{\beta}}$) , $\tau \to 0$.

Fungsi kegagalan jika $\underline{T}$ digunakan sebagai target penaksiran parameter model ($X\underline{\hat{\beta}}$), sama dengan

$$\left(X\underline{\hat{\beta}} - \underline{T}\right)'\left(X\underline{\hat{\beta}} - \underline{T}\right) = \left(X\underline{\hat{\beta}} - \{\tau\underline{Y} + (1-\tau)E(\underline{Y})\}\right)'\left(X\underline{\hat{\beta}} - \{\tau\underline{Y} + (1-\tau)E(\underline{Y})\}\right) \qquad (8)$$

yang jika dijabarkan, akan diperoleh persamaan

$$g(\tau) = (1-\tau)^2\left(X\underline{\hat{\beta}} - \underline{Y}\right)'\left(X\underline{\hat{\beta}} - \underline{Y}\right) + \tau^2\left(X\underline{\hat{\beta}} - X\underline{\beta}\right)'\left(X\underline{\hat{\beta}} - X\underline{\beta}\right) + 2\tau(1-\tau)\left(X\underline{\hat{\beta}} - \underline{Y}\right)'\left(X\underline{\hat{\beta}} - X\underline{\beta}\right) \qquad (9)$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Teori ini digunakan untuk membandingkan pendapat pengguna obat dan produsen obatnya, terhadap tingkat penyembuhan, berdasarkan variabel-variabel pengaruhnya. Sudah dipaparkan sebelumnya, berdasarkan teori Farmakologi, tingkat penyembuhan obat (Y) bergantung pada beberapa faktor, diantaranya umur (X_1), asupan gizi (X_2) dan kedisiplinan meminum obat (X_3). Dengan model regresinya linear,

$$Y = \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3 + \varepsilon$$

Bedasarkan teori yang telah dipaparkan, taksiran untuk β_1, β_2 dan β_3, bagi pengguna obat adalah taksiran faktual, sedangkan pabrik, taksiran rata-rata hitung nilai faktual. Sehingga dalam membangun fungsi target $\underline{T}$, untuk pengguna obat, $\tau \to 1$, sedangkan untuk pabrik $\tau \to 0$. Dengan deviasi bisa digunakan sama.

Berdasarkan sampel yang diambil untuk masing-masing kelompok pengamatan (pengguna obat dan pabrik obat), dilakukan identifikasi model, sehingga diperoleh model dengan MSE minimal. Selanjutnya dilakukan telaahan perbandingan model, untuk menentukan peran mana yang akan dipilih.

Berdasarkan data yang diperoleh dari 127 orang yang menderita flu, yang berobat ke sembilan Puskesmas di Kabupaten Bandung, yang diambil secara acak. Dengan obat yang diberikan adalah yang mengandung unsur paracetamol, dari lima merek obat yang diproduksi oleh lima pabrik. Semua obat merupakan obat generik. Model yang diperoleh adalah

$$\hat{Y} = -1{,}27X_1 + 3{,}22X_2 + 2{,}45X_3 \qquad (10)$$

dengan MSE = 2,47.

Jika model ini digunakan sebagai target bagi pengguna obat, maka nilai fungsi kegagalannya 2,56. Sedangkan bagi pabrik 3,21. Yang berarti tingkat keyakinan akan kesembuhan dari pengguna obat, lebih tinggi dari pabrik pembuatnya.

4. PENUTUP

Dari hasil telaah kepustakaan dan implentasi pada tingkat penyembuhan paracetamol terhadap penyakit flu, beberapa hal yang bisa dikemukan.

1. Pada formulasi fungsi kegagalan $g(\tau)$, dua suku pertamanya identik dengan fungsi kegagalan tertimbang, seperti yang dikemukakan Zellner (1994), sedangkan suku ketiganya merupakan kovarians tertimbang antara kedua simpangan dari peran $X\underline{\hat{\beta}}$. Hal ini menyimpulkan, jika ingin menampilkan sasaran dari analisis regresi biasa, yaitu menentukan apakah $X\underline{\hat{\beta}}$, sebagai penaksir nilai aktual

($\hat{\underline{Y}} = X\hat{\underline{\beta}}$), atau rata-rata nilai aktual ($E(\hat{\underline{Y}}) = X\hat{\underline{\beta}}$), maka ada dua besaran yang harus disyaratkan, yaitu **pembobot** (τ) dan **simpangan** ($\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}$).

2. Fungsi resikonya (*risk function*) dari fungsi target $\underline{T}$, sama dengan $R(\tau) = E\{g(\tau)\}$, yang jika dijabarkan sama dengan $\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right)$. Hal ini menunjukan bahwa fungsi resiko bersifat konstan, sama dengan jumlah kuadrat total residu (*total predictive means squared error*, **MSE**). Sehingga untuk menampilkan peran dari $X\hat{\underline{\beta}}$, harus dilakukan klasifikasi model dengan MSE minimal.
3. Model yang diperoleh adalah data berdasarkan pengguna obat dari kelompok masyarakat menengah ke bawah, sehingga belum mencerminkan model sebenarnya. Sebab kelompok pengguna dari masyarakat atas belum tersentuh. Sehingga perlu dilakukan penelitian lanjut, untuk mendapatkan model yang *goodness of fit*

DAFTAR PUSTAKA

[1] H. de Jonge ; Quantitative Methods in Pharmacology ; *Proceeding of A Symposium Held inLeyden*, on May 10 – 13 ; 1961 ; pp. 89 – 127.

[2] J. A. Giles , D. E. A. Giles , K. Ohtani ; The Exact Risk of Some Pre-Test and Stein-Type Regression Estimators Under Balanced Loss ; *Communications in Statistics-Theory Math*. vol. 25 ; 1996 ; pp. 37 – 45.

[3] F. A. Graybill ; 1961 ; *An Introduction to Linear Statistical Models* ; McGraw-Hill ; New York ; 1961 ; pp. 121 – 322.

[4} R. V. Hogg , A. T. Craig ; 1978 ; *Introduction to Mathematical Statistics, 4th ed.* ; Macmillan Publishing Co. Inc. ; New York ; 1978 ; pp. 57 – 121 , 257 – 395.

[5] Shalabi ; Improving The Prediction in Linear Regression Models ; *Journal of Statistical Research vol. 33* ; Bangladesh. 1999 ; pp. 33 – 37.

[6] R. G. D. Steel , J. H. Torrie ; 1981 ; *Principle and Procedures of Statistics, a Biometrical Approach* ; McGraw-Hill Int. Book Co. ; Auckland ; 1981 ; pp. 123 - 341

[7] A. Zellner ; *Bayesian and Non-Bayesian Estimation Using Balanced loss Functions, Statistical Decision Theory and Related Topics V* ; Springer-Verlag, Eds. S. S. Gupta and J. O. Berger ; New York. 1994 ; pp. 97 – 178 ; 251 – 367 .